xy 平面上において，連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq 0, \\ y \geqq 0, \\ x+2y-8 \leqq 0, \\ 3x+2y-12 \leqq 0 \end{cases}$$

で表される領域を D とする．

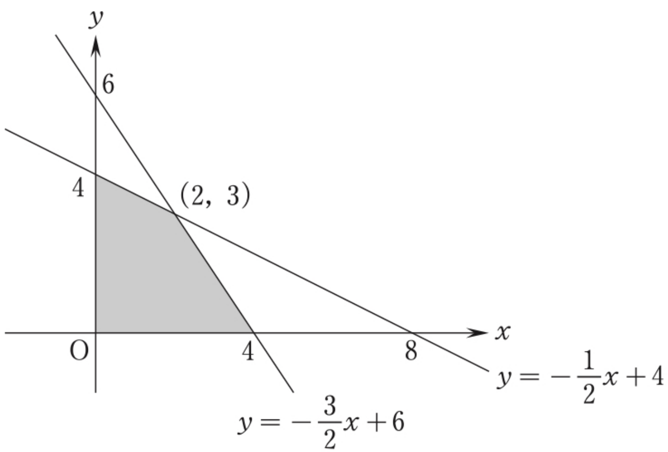
(1) D を図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ．

(1)

$$D:\begin{cases} x \geqq 0, \\ y \geqq 0, \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x+4, \\ y \leqq -\dfrac{3}{2}x+6 \end{cases}$$

であるから，D を図示すると次図の網掛け部分になる．ただし，境界を含む．

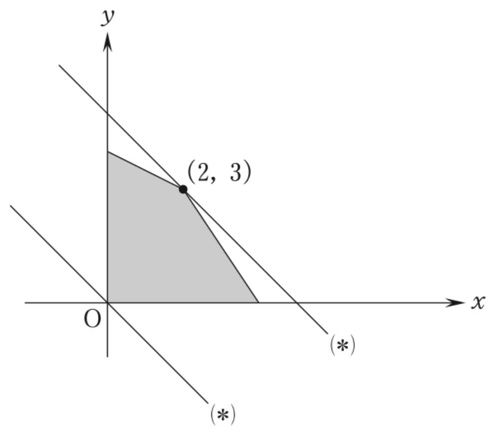


(2) $x+y=k$ とおくと，

$$y=-x+k \qquad \cdots(*)$$

より，$(*)$ は傾き -1，y 切片 k の直線を表す．

$(*)$ と D が共有点をもつような k の最大値と最小値を求める．



k が最大になるのは，$(*)$ が点 $(2,\ 3)$ を通るときより，

$$3=-2+k,\ \text{すなわち}\quad k=5.$$

k が最小になるのは，$(*)$ が原点を通るときより，

$$0=0+k,\ \text{すなわち}\quad k=0.$$

よって，$x+y$ の

最大値は 5，　最小値は 0．

3 つの不等式

$$x^2+y^2 \leqq 1,\quad y \geqq -x,\quad y \geqq 0$$

を同時に満たす実数 x, y について，次の式の値の最大値と最小値を求めよ．

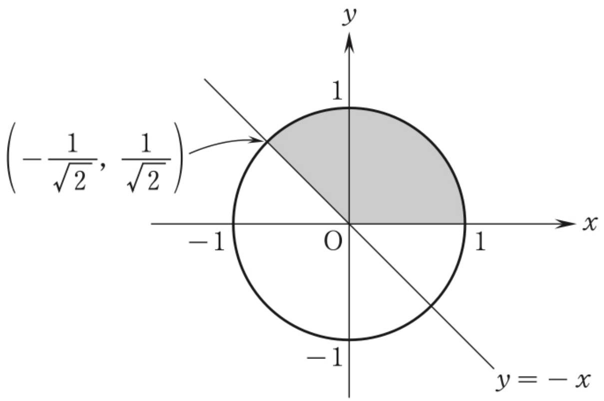
(1) $y-\sqrt{3}\,x$

(2) $\sqrt{3}\,y-x$

xy 平面で，連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1, \\ y \geqq -x, \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

の表す領域を D とおくと，D は次図の網掛け部分になる．ただし，境界を含む．

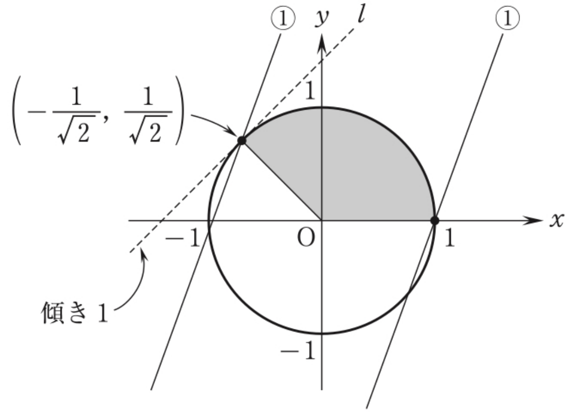


(1) $y-\sqrt{3}\,x=k$ とおくと，

$$y=\sqrt{3}\,x+k \qquad \cdots ①$$

より，① は傾き $\sqrt{3}$，y 切片 k の直線を表す．

① と D が共有点をもつような k の最大値と最小値を求める．



円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における接線 l の傾きは 1 であり，① の傾き $\sqrt{3}$ はそれよりも大きいことから，k が最大になるのは，① が点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通るときである．

したがって，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+k,\ すなわち\quad k=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$$

また，k が最小になるのは，① が点 $(1,\ 0)$ を通るときで，

$$0=\sqrt{3}+k,\ すなわち\quad k=-\sqrt{3}.$$

よって，$y-\sqrt{3}\,x$ の

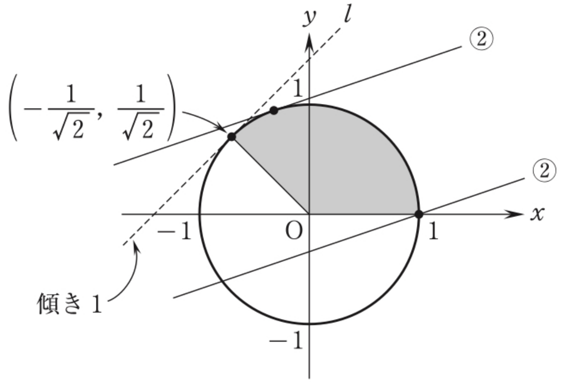
最大値は $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}$，　最小値は $\boldsymbol{-\sqrt{3}}$．

(2) $\sqrt{3}\,y-x=u$ とおくと,

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{u}{\sqrt{3}} \qquad \cdots ②$$

より, ② は傾き $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, y 切片 $\dfrac{u}{\sqrt{3}}$ の直線を表す.

② と D が共有点をもつような u の最大値と最小値を求める.



② の傾き $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ は, l の傾き 1 より小さいことから, u が最大になるのは, ②：$x-\sqrt{3}\,y+u=0$ が円 $x^2+y^2=1$ と図のように第 2 象限で接するときである.

$$\frac{|u|}{\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}}=1$$

より,

$$|u|=2.$$

図から $u>0$ であるから,

$$u=2.$$

また, u が最小になるのは, ② が点 $(1,\ 0)$ を通るときで,

$$0=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{u}{\sqrt{3}}, \text{ すなわち } \quad u=-1.$$

よって, $\sqrt{3}\,y-x$ の

最大値は 2,　最小値は −1.

xy 平面において，連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y \leqq 0, \\ y \geqq x+1 \end{cases}$$

で表される領域を D とする．点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，

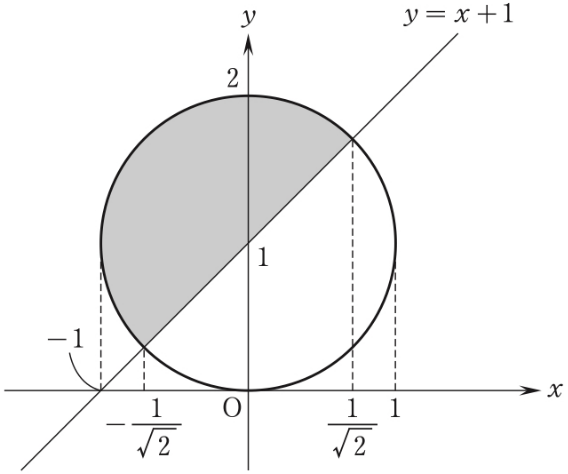
(1)　$3y-x$ の最大値を求めよ．

(2)　x^2-4x+y^2+4 の最小値を求めよ．

円 $x^2+y^2-2y=0$ と直線 $y=x+1$ の共有点の座標は，

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}+1\right),\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)$$

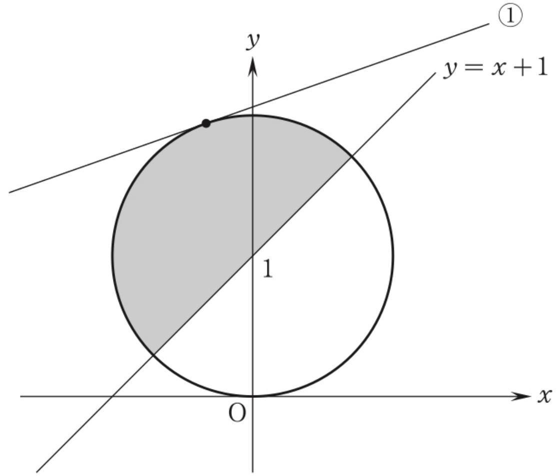
である．したがって，領域 D は図の網掛けの部分．ただし，境界を含む．



(1)　$3y-x=k$ とおくと，

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{k}{3}. \qquad \cdots ①$$

① は傾き $\frac{1}{3}$，y 切片 $\frac{k}{3}$ の直線である．D と直線 ① が共有点をもつような k の最大値を求める．



k が最大となるのは，直線 ① と円 $x^2+y^2-2y=0$ が第 2 象限で接するときである．

このとき，中心 $(0,\ 1)$ と直線 ①$(x-3y+k=0)$ の距離が 1 に等しいので，

$$\frac{|0-3\cdot 1+k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=1.$$

これより，$|-3+k|=\sqrt{10}$ より，

$$-3+k=\pm\sqrt{10}.$$

図より，$k>0$ であるから，

$$k=3+\sqrt{10}.$$

このとき，図のように接点は D に属する．

よって，求める最大値は，

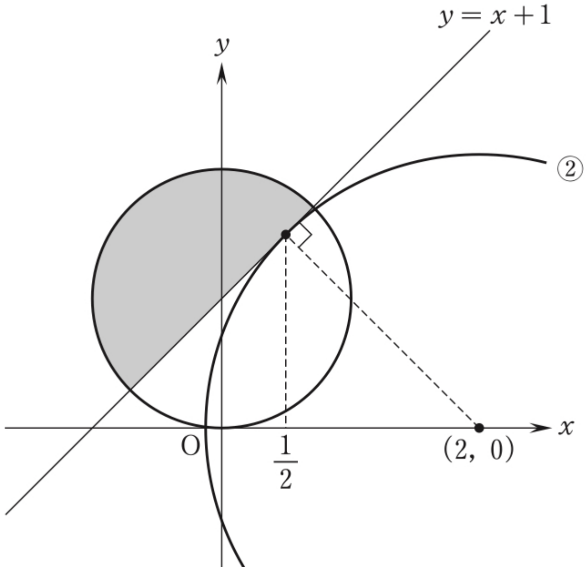
$$\mathbf{3+\sqrt{10}}.$$

(2)　$x^2-4x+y^2+4=l$ とおくと,

$$(x-2)^2+y^2=l. \qquad \cdots ②$$

円 ② と D が共有点をもつ　　　　$\cdots (*)$

ような l の値のうち，最小のものを求める．そのとき $l>0$ であり，② は中心 $(2,\ 0)$，半径 $\sqrt{l}$ の円を表す．



$(2,\ 0)$ を通り，$y=x+1$ に垂直な直線 $y=-x+2$ と直線 $y=x+1$ の交点は $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ であり，この点は D に含まれる．

よって，$(*)$ の下で半径 $\sqrt{l}$ が最小となるのは，円 ② と直線 $y=x+1$ が点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ で接するときである．

このとき,

$$l=\left(\frac{1}{2}-2\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}.$$

よって，求める最小値は

$$\boldsymbol{\frac{9}{2}}.$$

xy 平面上に直線

$$l_t : y=2(t-1)x-t^2+1$$

がある．

t が $t \geqq 0$ の範囲を動くとき，l_t の通過する領域を求め，図示せよ．

$t \geqq 0$ のとき，l_t: $y=2(t-1)x-t^2+1$ が点 $(X,\ Y)$ を通る条件は，

「$Y=2(t-1)X-t^2+1$ を満たす

実数 t $(\geqq 0)$ が存在する」

ことであり，これは

「t の 2 次方程式

$$t^2-2Xt+2X+Y-1=0$$

が 0 以上の解をもつ」

と言い換えることができる．

$$f(t)=(t-X)^2-X^2+2X+Y-1$$

とおくと，求める条件は，

$$\begin{cases} X \leqq 0, \\ f(0) \leqq 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} X > 0, \\ f(X) \leqq 0. \end{cases}$$

したがって，

$$\begin{cases} X \leqq 0, \\ Y \leqq -2X+1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} X > 0 \\ Y \leqq X^2-2X+1. \end{cases}$$

よって，l_t の通過する領域は，次図網掛け部分である．ただし，境界を含む．