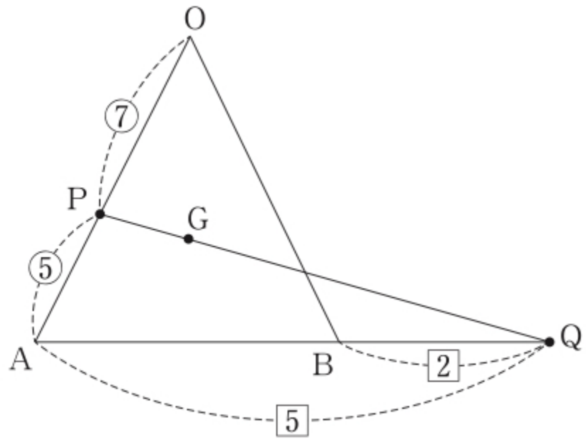
三角形OABにおいて，辺OAを7:5に内分する点をP，辺ABを5:2に外分する点をQとする．さらに，三角形OABの重心をGとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$をそれぞれ$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いてそれぞれ表せ．

(3) 3点P，G，Qは同一直線上にあることを示し，線分の長さの比PG:GQを求めよ．



(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{7}{12}\overrightarrow{\mathbf{OA}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5-2}$$
$$=-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathbf{OB}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathbf{OB}}.$$

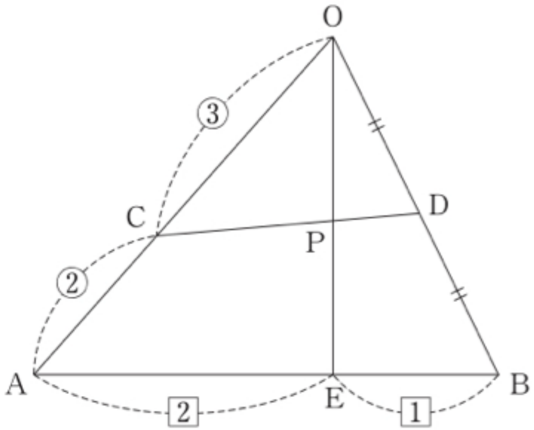
(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=-\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathbf{OB}}. \qquad \cdots ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathbf{OB}}. \qquad \cdots ②$$

(3) ①，②より，
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=5\overrightarrow{\mathrm{PG}}.$$
したがって，

P，G，Qは一直線上にある．

また，このとき，
$$\mathrm{PG}:\mathrm{GQ}=\mathbf{1:4}.$$

三角形 OAB において，辺 OA を 3:2 に内分する点を C，辺 OB の中点を D，辺 AB を 2:1 に内分する点を E とし，2 直線 OE，CD の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．



P は直線 OE 上の点より，実数 k を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OE}}\\ &= k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\ &= \frac{1}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

と表せる．

また，P は直線 CD 上の点より，実数 t を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\ &= \frac{3}{5}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

と表せる．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は一次独立であるから，①，② より，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}k=\dfrac{3}{5}(1-t),\\[2mm] \dfrac{2}{3}k=\dfrac{1}{2}t.\end{cases}$$

これより，

$$k=\frac{9}{17},\quad t=\frac{12}{17}.$$

よって，① より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{3}{17}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{6}{17}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}.$$

平面上に三角形 OAB があり，その面積を S とする．平面上の点 P を

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\quad (s,\ t \text{ は実数})$$

によって定める．

(1) s, t が条件 $5s+4t=2$ を満たしながら変化するとき，P はどのような図形上を動くか．

(2) s, t が条件 $s\geqq 0$, $t\geqq 0$, $5s+4t\leqq 2$ を満たしながら変化するとき，P の存在する範囲の面積を S を用いて表せ．

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}. \qquad \cdots ①$$

(1)

$$5s+4t=2. \qquad \cdots ②$$

② より，

$$\frac{5}{2}s+2t=1. \qquad \cdots ②'$$

① を $\frac{5}{2}s$, $2t$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{5}{2}s\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+2t\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}. \qquad \cdots ①'$$

ここで，

$$\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC},\quad \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$$

すなわち，

$$\begin{cases}\text{線分 OA を } 2:3 \text{ に内分する点を C},\\ \text{線分 OB の中点を D}\end{cases}$$

とし，

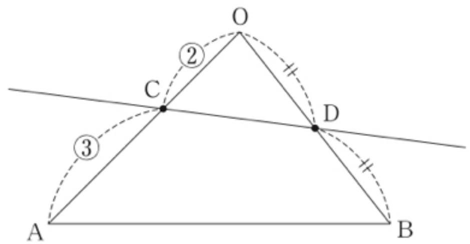
$$\frac{5}{2}s=u,\quad 2t=v$$

とすると，①′，②′ より，

$$\begin{cases}\overrightarrow{OP}=u\overrightarrow{OC}+v\overrightarrow{OD},\\ u+v=1.\end{cases}$$

したがって，点 P は，

直線 CD 上を動く．



(2)

$$\begin{cases}s\geqq 0,\quad t\geqq 0,\\ 5s+4t\leqq 2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\frac{5}{2}s\geqq 0,\quad 2t\geqq 0,\\ \frac{5}{2}s+2t\leqq 1.\end{cases}$$

よって，(1) と同様に，

$$\begin{cases}\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC},\quad \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD},\\ \frac{5}{2}s=u,\quad 2t=v\end{cases}$$

とおくと，

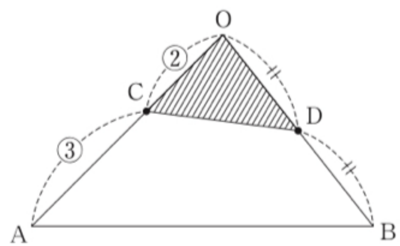
$$\begin{cases}\overrightarrow{OP}=u\overrightarrow{OC}+v\overrightarrow{OD},\\ u\geqq 0,\quad v\geqq 0,\quad u+v\leqq 1.\end{cases}$$

したがって，点 P の存在する範囲は，

三角形 OCD の周および内部である．

よって，その面積は，

$$\begin{aligned}\triangle OCD&=\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot\sin\angle COD\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}OA\cdot\frac{1}{2}OB\cdot\sin\angle AOB\\ &=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\angle AOB\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{5}S}.\end{aligned}$$



平面上に三角形 ABC があり，その内部にある点 P が

$$l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}+n\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0} \quad (l,\ m,\ n \text{ は正の実数})$$

を満たしている．

(1) 三角形 PBC，三角形 PCA，三角形 PAB の面積の比を求めよ．

(2) 点 P が三角形 ABC の内心であるとき，BC：CA：AB を求めよ．

(1) $l\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}+n\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}$ より，

$$-l\overrightarrow{\mathrm{AP}}+m(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+n(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\overrightarrow{0}.$$

$$(l+m+n)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

よって，

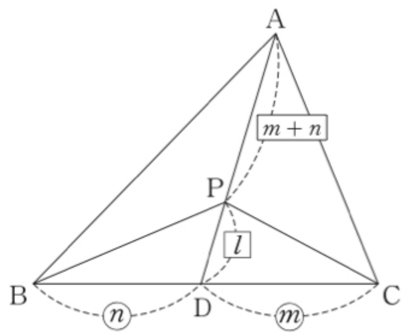
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{l+m+n}$$

$$=\frac{n+m}{l+m+n}\cdot\frac{m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{n+m}.$$

辺 BC を $n:m$ に内分する点を D とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{n+m}{l+m+n}\overrightarrow{\mathrm{AD}}.$$

したがって，P は線分 AD を $(m+n):l$ に内分する点である．



したがって，

$$\triangle\mathrm{PBC}=\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AD}}\triangle\mathrm{ABC}$$

$$=\frac{l}{l+m+n}\triangle\mathrm{ABC}.$$

同様に考えると，

$$\triangle\mathrm{PCA}=\frac{m}{l+m+n}\triangle\mathrm{ABC},$$

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{n}{l+m+n}\triangle\mathrm{ABC}.$$

よって，求める面積比は，

$$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=\boldsymbol{l:m:n}.$$

(2) 点 P が三角形 ABC の内心であるとき，内接円の半径を r とすると，

$$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}$$

$$=\frac{1}{2}r\cdot\mathrm{BC}:\frac{1}{2}r\cdot\mathrm{CA}:\frac{1}{2}r\cdot\mathrm{AB}$$

$$=\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}.$$

よって，(1) より，

$$\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}=\boldsymbol{l:m:n}.$$